*שיעור שביעי*

**מבנים דיסקרטיים**

**מספרי קטלן:**

*נגיד ויש לנו 3 זוגות סוגריים או את הסוגריים בצורה תקינה או במילים אחרות "סוגרים מאוזנים",*

*ואם יש לנו את הסוגריים אז הסוגריים אינם תקינים או במילים אחרות "סוגריים לא מאוזנים".*

*כמה אפשרויות אפשר לסדר 3 זוגות סוגריים בצורה מאוזנת?*

*ננסה לרשום את האפשרויות: , , , , , כלומר*

*= סימון מספר קטלן, = מספר סידורים מאוזנים של זוגות סוגריים.*

*נשים לב כי כי יש רק אפשרות אחת, כי , ו- כמו שכבר ראינו,*

*, .*

*הנוסחה של מספרי קטלן היא:*

***שאלה:***

*כמה דרכים יש לסדר 4 ")" ו-4 "("? מתוך זה כמה מהם מאוזנים?*

**פונקציות יוצרות:**

***תרגיל:***

*יש לנו 2 קוביות – קוביה אחת היא קוביה רגילה עם 6 צדדים (מספרים מ-1 עד 6), קוביה שניה היא קוביה משולשת בעלת 4 צדדים (מספרים מ-1 עד 4), בכמה אפשרויות ניתן להטיל 2 קוביות ולקבל 6?*

*אפשרויות: , , , סה"כ 4 אפשרויות.*

***תרגיל נוסף:***

*יש שני ילדים (ראובן ושמעון) ויש 6 סוכריות זהות, צריך לחלק להם את הסוכריות אבל כשלראובן מותר עד 4 סוכריות ולשמעון עד 6 סוכריות, וכל אחד חייב לקבל לפחות סוכריה אחת, אפשרויות: , , , סה"כ 4 אפשרויות.*

***תרגיל נוסף באופן כללי יותר:***

*כמה דרכים יש לקבל סכום בשתי הקוביות (מהתרגיל הקודם)?*

*אם אז התשובה היא 4 כמו שראינו.*

*אם אז האפשרויות הן סה"כ 4.*

*אם אז האפשרויות הן סה"כ 3,*

*אם אז האפשרויות הן סה"כ 2,*

*אז האפשרויות הן סה"כ 1,*

*אם אז התשובה היא 0.*

***נסתכל על הביטוי הבא:***

*כאשר נפתח את הביטוי נקבל:*

*ניתן לראות שיש קשר בין מתרגיל הקודם שהוא החזקה אצלנו והמקדמים הם התשובות שנתנו ל-,*

*אם נרצה לראות מה המקדם הספציפי של נוכל לקחת את כל 4 האיברים הראשונים ולהכפיל אותם באיברים מה-6 האיברים האחרים (איברים שאם נכפיל אותו בהם נקבל ) ונקבל:*

*נמיר את הביטוי לסדרה:*

*בעצם יש לנו את הפולינום הבא:*

*או במילים אחרות:*

*תור זה נקרה גם הפוקנציה היוצרת של הסדרה, לכל סדרה יש פונקציה יוצרת.*

***דוגמה:***

*נתונה הסדרה:*

*הפונקציה היוצרת של הסדרה:*

***תרגיל:***

*יש לנו 5 ילדים ו- סוכריות,*

*– מותר לו לקבל 2,5,7,8 סוכריות,*

*– מותר לו לקבל כמה סוכריות שהוא רוצה,*

*– מותר לקבל עד 5 סוכריות,*

*– מותר לו לקבל בין 10 ל-20 סוכריות.*

*בכמה דרכים ניתן לחלק לידלים את ה- סוכריות? נמצא את הפונציה היוצרת לבעיה זו,*

*נגדיר = מספר הדרכים לחלק סוכריות (לפי נפונקציה היוצרת), פתרון:*

*לילד הראשון מותר לקבל 2,5,7,8 סוכריות ולכן נרשום ,*

*לילד השני מותר לקבל כמה סוכריות שהוא רוצה ולכן נרשום את הפולינום הכללי ,*

*לילד השלישי והרביעי מותר לקבל עד 5 סוכריות ולכן נרשום ,*

*לילד החמישי מותר לקבל בין 10 ל-20 ולגן נרשום , נכפיל את כולם:*

*אם למשל נמצא את המקדם של בפולינם, המקדם יהיה שווה למספר האפשרויות לחלק 24 סוכריות לחמשת הילדים.*

***תרגיל:***

*יהי מספר המספרים בעלי 6 ספרות שסכומן הוא , למשל אז אפשרות אחת היא ,*

*נבנה פונקציה יוצרת ל-, לספרה הראשונה איזה ערכים היא יכולה לקבל? מ-1 עד 9 כי אסור שיהיה 0 ולכן נרשום: לכל שאר הספרות מותר לקבל ערכים מ-0 ל-9 ולכן נרשום כלומר:*

*נוסחאות חשובות:*

*תור גואמטרי סופי:*

*שיטה לזכור את הנוסחה:*

*נסמן נכפול את שני האגפים ב- נקבל:*

*נחשב את כלומר נקבל (כי הכל הצתמצם) קיבלנו ננסה לבודד את :*

*כלומר סכום סדרה הנדסית.*

*תור גאומטרי אין סופי:*

*כל עוד*

*נחזור לתרגיל הקודם:*

*זאת פוקנציה יוצרת של .*